CÁLCULO Y MÉTODOS NUMÉRICOS

Prof: Iñigo Sarría

Marzo - Junio 2021

Canal YouTube El traductor de ingeniería

FUNCIONES

FUNCIÓN → $f(x)$ es una regla que se le asigna a cada elemento del conjunto A para hacerlo corresponder con un único elemento del conjunto B.

$$y = f(x) \text{ siempre que } x \in A \text{ e } y \in B$$

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad$ $B \subseteq \mathbb{R}$

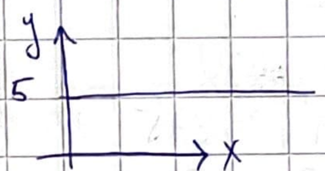
$\boxed{\begin{array}{l} A \subseteq B : \forall e \text{ de } A \text{ es tb } e \text{ de } B \\ A \subset B : A \subseteq B \text{ pero } A \neq B \end{array}}$

↓

Vamos de una parte de los nºs $\mathbb{R}$ a otra parte de los nºs $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Si quiero representar una constante:

$$y = 5$$

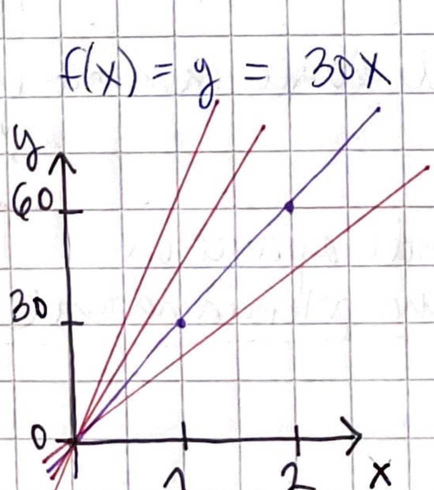


$\boxed{\text{FUNCIÓN SIMPLE}}$

Puedo multiplicar los valores de entrada por una constante

$y = cte \cdot x$ → la gráfica dependerá del valor de la constante.

$f(x) = y = 30x$



Si x (valor de entrada) vale 0, $y = 0$

$x = 1$, y será 30

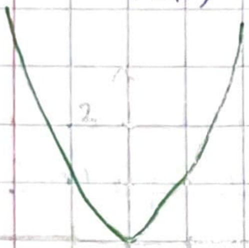
$x = 2$, y será 60 etc.

Gráfico ↗

Si cambio la constante quedan ≠ rectas, pero todas pasan por 0

¿Y si multiplico x por sí misma?

$$f(x) = y = x \cdot x = x^2$$



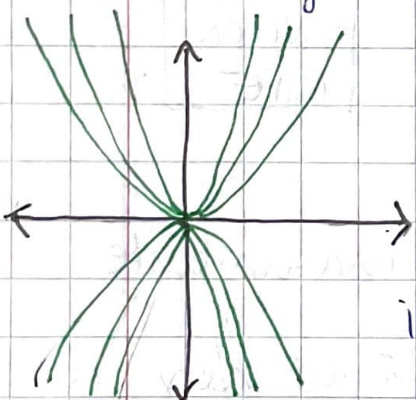
$x = 0 \quad = 0$
$x = 1 \quad = 1$
$x = -1 \quad = 1$
$x = 2 \quad = 4$

Hay situaciones en la realidad donde una magnitud depende cuadráticamente de la otra.

Aquí hay una relación cuadrática entre x e y

Si cambio la constante, por ej.

$$f(x) = y = 875x^2$$



$x = 1 \quad = 875$
$x = 2 \quad = 3500$

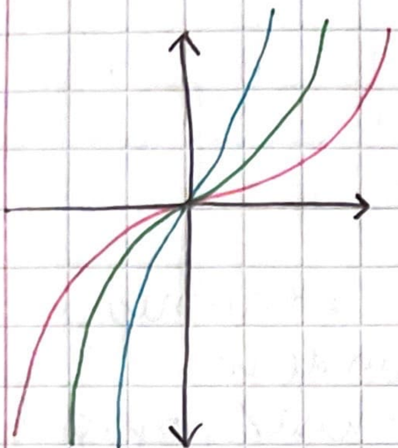
La parabola es mucho + inclinada. La inclinación depende del número.
Si la constante es negativa, el resultado será negativo y las parabolas son para abajo.

↳ Familia de parabolas donde lo que cambia es el coeficiente del monomio

¿Para qué sirve? Lanzamiento de 1 objeto desde superficie de la tierra describe trayectoria parabólica.

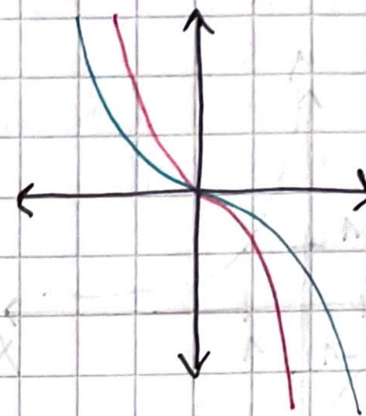
MONOMIO ⇒ Expresión matem. donde aparece un coeficiente con x a una potencia natural.

$f(x) = cte \cdot x^3$ Relación cúbica entre x e y



$\Leftarrow$ Cte positiva

Cte negativa $\Rightarrow$



Otros monomios $2x$, $8x^3$, $-2x^2$

ax^n a por x a la n

$a \in \mathbb{R}$ con a perteneciente a los reales

$n \in \mathbb{N}$ con n perteneciente a los naturales

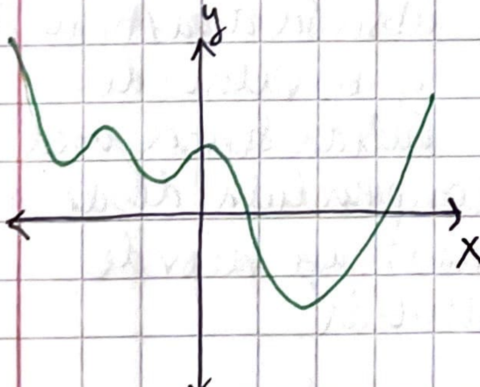
MONO = UNO
NOMIO = FRACCIÓN, PARTE } Una parte que está compuesta por 1 sola cosa

$f(x) = x^0 = 1$

$cte \cdot x^0 = cte$

$2x + x \rightarrow$ sí es monomio

$3x$



$f(x) = 2x + 3x^2 \rightarrow$ No es monomio
No son términos semejantes

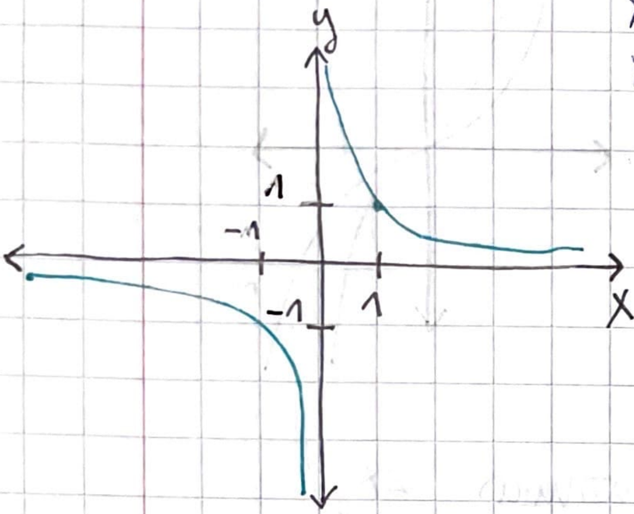
POLINOMIO

Así suelen ser sus gráficas

$f(x) = \frac{1}{x}$ Es una hipérbola

$x = 1 \quad = 1/1 = 1$

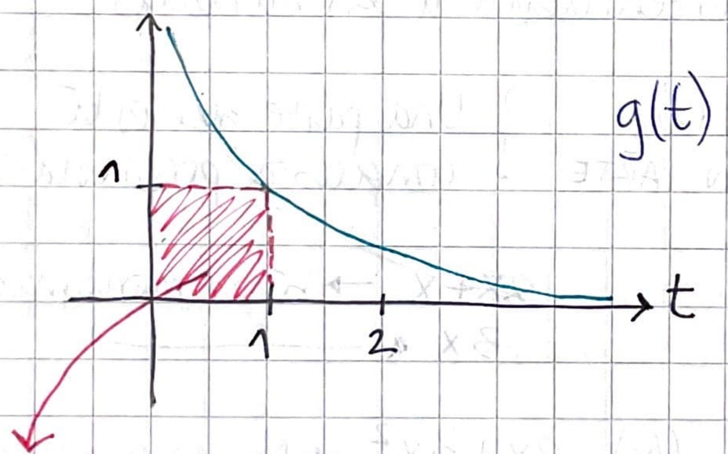
$x = -1 \quad = 1/-1 = -1$



Hay muchas situaciones en la realidad donde una magnitud es inversa/. proporcional a otra

$f(x) = \frac{1}{x}$

x	y
1	1
2	0,5



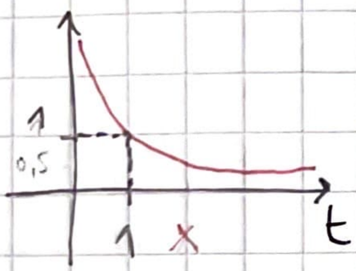
$g(t) = \frac{1}{t}$

Me armo una nueva función, máquina, donde los valores de entrada son valores de abscisa a partir de 1 y los valores de salida son el área comprendida desde 1 hasta ese valor de abscisa.

El área de ese cuadrado vale 1

Si ingreso 2, la salida será el área entre 1 y 2

Esa área es menor que 1



Genéricamente, si a la máquina le doy un x variable, entre 1 e infinito, devuelve el área asociado a ese x

$A(x)$ Es un Área en término de x

Si x vale 1, el área vale 0.

Esa máquina es una función de x, depende de x.

$A(1) = 0$

↳ A medida que se incrementa x se incrementa el área.

ESTA FUNCIÓN SE LLAMA LOGARITMO NATURAL O NEPERIANO.

Esta es una explicación muy sencilla y valida solo si $x \geqslant 1$

$\ln 1 = 0$

El área entre 1 y $+\infty$ es infinita.

Ahora, si quiero que la máquina funcione de otra forma, quiero darle el área que me interesa y que me devuelva la abscisa que cumple con eso es:

$A(x) \longrightarrow \boxed{e^{(\ )}} \longrightarrow x$

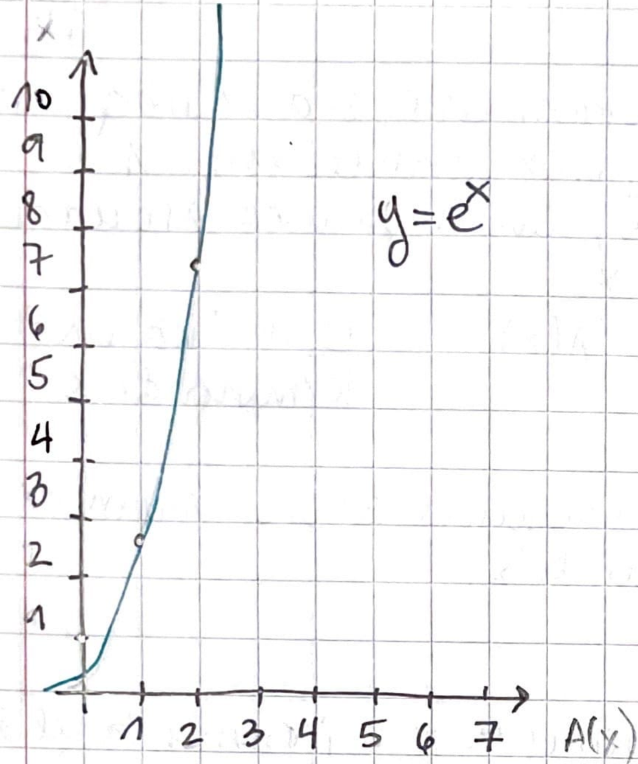
e elevado al valor de entrada, al área que me interesa

$e = 2{,}718281\ldots$

Ax	x
0	1
1	2,7182 = e
2	7,3

Ax	x
3	20,08
4	54,5
5	148,4

6	403,4
7	1096,6



1ª máquina → $\ln x$
2ª máquina → e^x → Dimos vuelta la máquina, una es la inversa de la otra.

La inversa de e^x es $\ln x$.

Me armo familias de exponenciales = a^x

$f(x) = a^x$ Si evaluo en 0, da 1, todas pasarán por 1

Por ejemplo, las bacterias crecen de manera exponencial.

Un poco más de rigor matemático, el logaritmo natural se define como

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \implies$$ INTEGRAL DESDE 1 HASTA X DE LA FUNCIÓN $\frac{1}{t}$ DIFERENCIAL DE t.

Se dice que ln x es una función f(x) tal que su derivada es igual a $\frac{1}{x}$

ln x

f(x) tal que

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{f(1) = 0}$$

⇐ ECUACIÓN DIFERENCIAL

↓

Como es una ec. diferencial, para resolverla tengo que agregar una condición

Existe una magnitud de la naturaleza que tiene la característica de que crece, pero su velocidad de crecimiento, su tasa de crecimiento es c/vez + baja. Siempre crece, pero a medida q' x evoluciona, su forma de crecimiento es c/vez menor.

La tasa de crecimiento es inversa/. proporcional a x

$$\text{TASA CRECIMTO} = \frac{1}{x}$$

La tasa de crecimiento de 1 func es otra func llamada derivada. Se plantea que la derivada sea igual a $\frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ ← ECUACIÓN DIFERENCIAL

↓

Para resolverla hay que plantear una condiø.

↓

CONVENCIÓN – La funø que cumple esa ecuaø, cuando la evaluo en 1 da por resultado 0

$f(1) = 0$ ← CONDICIÓN

Solo 1 función cumple esto:

$f(x) = \ln(x)$

Si la derivada de la funø es $\frac{1}{x}$, entonces la integral de $\frac{1}{x}$ es igual a esa funø.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

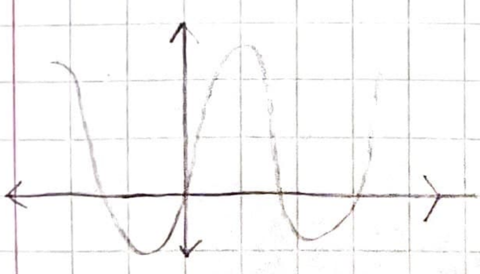
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = f(x) = \ln(x)$$

El $\ln(x)$ es la integral desde 1 hasta x de la funø $\frac{1}{t}dt$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

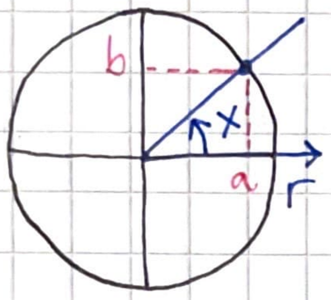
Tomamos por ejemplo el seno

$f(x) = \text{sen}(x)$

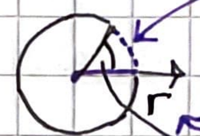


¿Cuál es el origen del seno? No está en la función seno, está en ver al seno como una RELACIÓN.

La fun∅ es una generaliza∅ de una rela∅ original con triángulos. Dp. se generalizó con una circunferencia y dp. se vio una fun∅.



Un radián es el angulo q̄ se forma cuando la porción de arco coincide con el radio de la circunferencia. Y eso es independiente del radio.



Si armo una máquina y le doy como entrada el angulo que me interesa (rad) y la cuenta que hace es una cuenta con b y r puedo armar y hacer aparecer el seno

Si la cuenta es b/r, la salida es el seno de x.

b → ordenada asociada
r → radio

El valor de la ordenada SÍ depende de x. b es una fun∅ de x

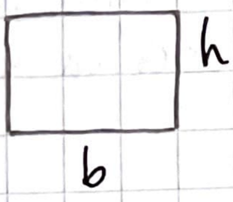
$$y = \frac{b(x)}{r}$$

También podemos ver que los valores que toma b dependen del radio.

$\frac{b(x)}{r}$ → Depende de r de forma tal que al hacer la cuenta el resultado del cociente logra independizarse del valor de r

$\frac{b}{r}$ → ES una cuenta que funcionará en cualquier circunferencia.

⇒ La cuenta, por más que tenga r, no depende de r.



$A = b \cdot h$

Ahora, si tengo que la altura (h) es $\frac{1}{b}$

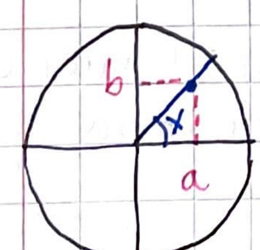
$A = b \cdot \frac{1}{b}$

$A = 1$ → El área termina sin depender de ninguna de las 2 variables (ni b ni h)

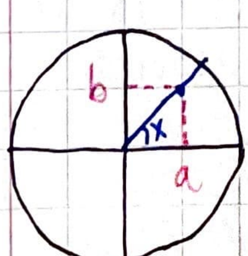
Así sucedía en el caso de la circunferencia $y = \frac{b}{r}$

$y = \frac{b}{r}$ → Esta cuenta, por más que tenga r, lo de arriba (b) tiene de alguna forma implícita r, de forma que al hacer la cuenta se cancela. Entonces no depende de r.

Y si en vez de usar b uso la abscisa, con la misma idea, la máquina se llama coseno.



$\xrightarrow{x} \boxed{\cos x} \rightarrow a$



$\xrightarrow{x} \boxed{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \rightarrow$

↓

$\operatorname{tg} x$

$$x \to \boxed{\frac{1}{\cos x}} \to$$

$\sec(x)$

$$x \to \boxed{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \to$$

$\operatorname{cosec}(x)$

$$x \to \boxed{\frac{1}{\tan(x)}} \to$$

$\operatorname{cotan}(x)$

$$x \to \boxed{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} \to$$

$\operatorname{senh}(x)$

SENO HIPERBÓLICO DE X

$$x \to \boxed{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \to$$

$\cosh(x)$

COSENO HIPERBÓLICO DE X

$$x \to \boxed{\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}} \to$$

$\tanh(x)$

TANGENTE HIPERBÓLICA

Canal de YouTube El traductor de ingeniería

ESTUDIO DE FUNCIONES: DOMINIO, CONTINUIDAD, CRECIMIENTO, CONCAVIDAD Y MÁS

La funcø es una regla que le asigna a c/e de su dominio un número. Ese número pertenece al rango o imagen de la funcø.

DOMINIO: Es el conjunto de los valores x que puede dominar la funcø.

En este caso, tenemos una expreø algebraica. Para pensar el dominio de esta funcø hay que pensar los x a través de los cuales la cuenta se puede hacer.

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

¿Cuándo esta cuenta con x no se podrá hacer?

$\cancel{\frac{1}{0}}$ NO SE PUEDE DIVIDIR POR CERO, NUNCA.

$\cancel{\sqrt{-()}}$ RAÍCES DE Nºs NEGATIVOS

Estamos trabajando con reales
Reglas que asignan a cada real
Un único número real $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

En este caso, los x que no pertenecen al dominio son los q̀ hacen q̀ el denominador valga 0.

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

$$x^3 = 0$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{0}$$
$$x = 0 \to \text{No} \in \text{al dominio}$$

$$\mathrm{Dom}\{f\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Todos los x de la recta real menos el 0.

IMAGEN O RANGO: Conjunto de todas las posibles salidas.

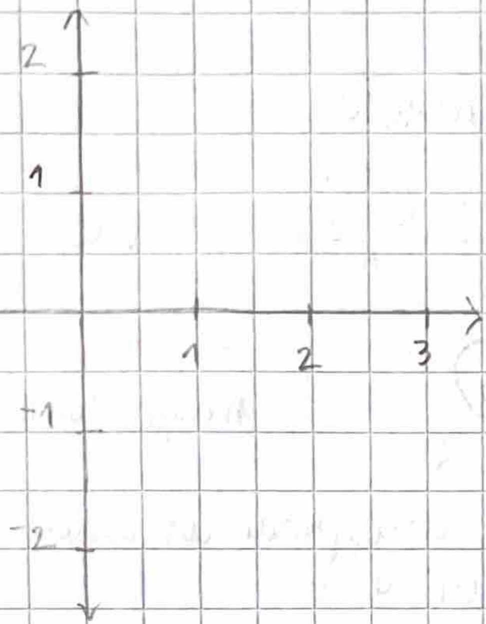
No es tan sencillo encontrar todas las salidas. Una opción es, si la func admite inversa, el dominio de la func inversa tiene mucho que ver con el rango de f, coinciden.

Si la func no admite inversa, hay que intuir cuál es la imagen graficando la func.

Ya sabemos, por el dominio, que el x no puede ser 0, la func no existe para cero. ¿Por qué?

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3} \qquad \cancel{\frac{0+1}{0}}$$

NO SE PUEDE DIVIDIR POR 0



Si quiero saber qué le pasa a la fnø en las cercanías de 0, $x \to 0$, x cercano a cero

$x \to 0^+$ POR DERECHA ← ¿Qué tiende a devolver la función?

$x \to 0^-$ POR IZQUIERDA

Esto se analiza a través de un LÍMITE

<u>Dominio</u>

$$\text{Dom}\{f\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Analizo que le pasa a la fnø cdo me acerco a 0.
Introducimos aquí el análisis de CONTINUIDAD.

CLASE 1 — 1 marzo 2021

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS

FUNCIÓN Relación entre 2 magnitudes

$$A \xrightarrow{f} B$$

A y B son conjuntos, magnitudes

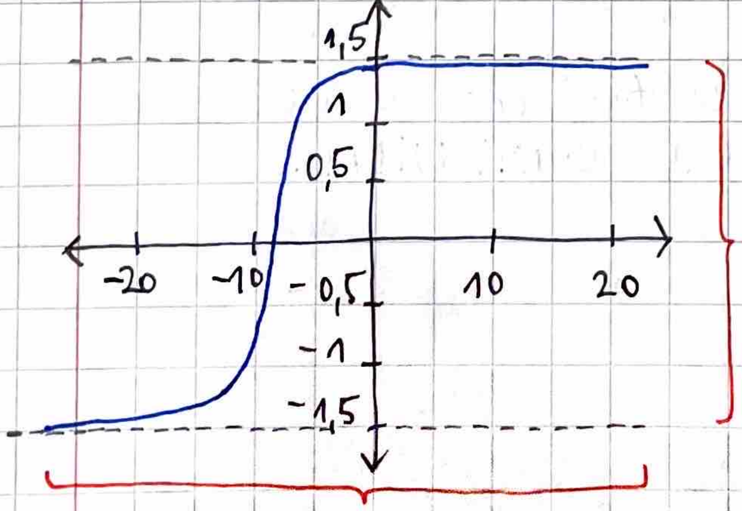
A cualquier valor q̃ esté dentro de A — le corresponde un único valor de B

HABLAMOS DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.
NACEN Y VAN HACIA $\mathbb{R}$.

DOMINIO Dentro del conjunto A, qué x son válidas.
El dom es un conjunto de puntos, de nºs que pertenecen al conjunto de salida, tal que, cuando aplico f, f de ese nº está definido, tiene un valor en el otro lado.

IMAGEN Son los nºs (t) que pertenecen al conjunto de llegada tal que existe un x en el conjunto de salida tal que $f(x) = t$.

$$D(f) \xrightarrow{f} Im(f)$$



El dom. de f. D(f) son los puntos en los cuales, si le doy valor a x, tengo una imagen, es decir, puedo pintarlo en azul. Para cada punto de x tengo un valor en y. El dominio de esta funø va desde $-\infty$ hasta $+\infty$

La imagen son los puntos t* que pertenecen a y, al conjunto de llegada tal que existe una imagen para ellos.
En este ejemplo, si tomo el 2 (en el eje y) no tiene una imagen, no corta a la gráfica de la funø.

DOMINIO = SE MIDE EN EJE X
IMAGEN = SE MIDE EN EJE Y

¿CÓMO CALCULAR DOMINIOS?

FUNCIÓN POLINÓMICA EXPONENCIAL → $D=\mathbb{R}$ → LA FUNØ EXISTE PARA TODOS LOS VALORES DE X

FUNCIÓN RACIONAL (COCIENTE) → $D=\mathbb{R}$ - VALORES Q' ANULAN DENOM. → IGUALAR A 0 DENOM., RESOLVER ECUAØ Y QUITAR ESOS VALORES DEL DOMINIO

FUNCIÓN IRRACØAL → ÍNDICE PAR → D = radicando ≥ 0 → NO EXISTE RAÍZ DE Nº'S NEGAT. SI ÍNDICE ES PAR. RESOLU. INECUAØ Y EL RESULT. ES EL DOMINIO

→ ÍNDICE IMPAR → D = dominio del radicando → SI RAÍZ ES DE ÍNDICE IMPAR NO INFLUYE EN DOMINIO

* t = Cualquier nº, un nº genérico

FUNCIÓN LOGARÍTMICA → D = LOGARITMO > 0 → NO EXISTEN LOGAR. DE Nº NEGAT. NI 0
FUNØ DENTRO DEL LOGAR. DEBE SER > 0
RESOLVER INEC. Y RESULT. ES EL DOMINIO

Ejemplos:

CALCULAR EL DOMINIO DE:

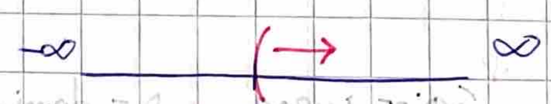
$$y = x + \sqrt{\frac{1}{x}}$$

① Veo que se compone de 2 cosas, ∴ es 1 funø polinómica. El dominio es todo $\mathbb{R}$, la parte de la x está clara.

② Puedo tener problema en el $\sqrt{\frac{1}{x}}$, es racional y de índice par. Vimos que el radicando tiene que ser positivo, o sea $\frac{1}{x} > 0$

es decir, $x \geq 0$ pero $x \neq 0$ porque si fuera 0 anularía al denominador

Los dominios se presentan como intervalos, en una recta (imaginaria)



$D = (0, +\infty)$

Del 0 en adelante, NO INCLUYE el 0. Hemos puesto paréntesis

* Para incluir el 0 se usa corchete [

$L(x^2-4)$ L= logaritmo neperiano → fund logarítmica

↓ lo del paréntesis debe ser >0

Para que se cumpla, X^2 debe ser >4 ←

x^2 se puede escribir $(x+2)(x-2)>0$

$(-x+2)(-x-2)>0$

$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

Cuando x es > que 2
Pero tb. sirve desde el −2 hacia atrás

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Es una operación que se puede hacer con fundes

DEFINICIÓN :

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subseteq B$, se define la fund compuesta $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in A$$

El resultado de $f(A)$, que caerá en $\mathbb{R}$ está contenido en B, es un conjunto + pequeño que B, la fund compuesta f compuesta con g $(g \circ f)$* es $g(f(x))$

↳ Para todo x q' pertenezca a A

NO ES CONMUTATIVA

$g \circ f$ NO ES LO MISMO QUE $f \circ g$

* Se lee al revés

Ejemplo:

$f(x) = e^x$ $g(x) = L(x-1)$

SE PIDE $(f \circ g)(x)$

Por definiø, para hacer $f \circ g$ (g compuesto con f) tengo que hacer $f(g(x))$

$$g(x) = L(x-1)$$

$$f(L(x-1))$$

$$e^{L(x-1)}$$

e y L son funciones inversas (como 1 y -1; o ×7 y ÷7). Por propiedad ley de identidad se anulan y queda exponente

$$x-1$$

El dominio de g compuesta con f sería esa función: $x-1$

↳ Es una funø polinómica

$D_{f \circ g} = (1, \infty)$

Ojo que no es todo $\mathbb{R}$ porque en esta funø el dominio está marcado por $g(x) = L(x-1)$

El dom. de $f \circ g$ está restringido por los puntos que pueden tomarse en g. Los puntos que pueden tomarse en g son los que el logaritmo neperiano es estricta%. mayor que 0, es decir $x > 1$

A g no le caben valores que sean + peq. que 1 y restringe el dominio de la composiø

51.3°

EJERCICIOS CÁLCULO DE DOMINIOS

1) $f(x) = \sqrt{1+x}$ irracional, índice par = radicando ≥ 0

$x = -1$ $1 - 1 = 0$

$Dom\, f(x) = (-1, \infty)$

2) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}}$ $x > -1$ $Dom = (-1, \infty)$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ POLINÓMICA → TODO $\mathbb{R}$, SALVO LOS QUE ANULEN AL DENOM.

$x = 3$ $3^2 = 9$ $9 - 9 = 0$

$x = -3$ $-3 \cdot -3 = 9$ $9 - 9 = 0$

$Dom = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

4) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ radicando ≥ 0

$3^2 = 9 - 9$

$x = 3$ $x = -3$

$x^2 - 9 \geq 0$

$(x+3)(x-3) \geq 0$

$x + 3 = 0$ $x - 3 = 0$

$x = -3$ $x = 3$

Dom: $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

5) $f(x) = \log(x^2 + 3x - 4)$ $\log > 0$

$x^2 + 3x - 4) > 0$

$(x + 4)(x - 1) > 0$

1º FACTORIZAR, 1er signo en 1er paréntesis. En 2º paréntesis la mult de los signos (originales)

2º Dos nºs q mult den 4 y restados den 3. Restados xq signos son ≠. Anotar 1º el mayor

3º) Puntos críticos

$x + 4 = 0$ $x - 1 = 0$

$x = -4$ $x = 1$

Graficar

los nºs anteriores a -4 hacen negat la expresión x = -4

x a todos los nºs anteriores a 1 hacen negat

multip. de signos

	-4		1	
-		+	+	$(x+4)$
		-	+	$(x-1)$
		-	+	$(x+4)(x-1)$

$(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-6}}{x-4}$ ① ②

$x-4 \geq 0 \qquad x \geq 4$

$x < -\sqrt{3}, \quad \sqrt{3} < x$

$-\sqrt{3} \qquad \sqrt{3}$

$-1{,}73 \qquad 1{,}73$

① $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

② $[4, \infty)$

$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 4] \cup [4, \infty)$

7) $f(x) = \dfrac{x + e^{-x}}{\log(1-x)}$

$1 - x > 0 \quad (\cdot -1) \quad -1 + x < 0 \quad x < 1$ X MENOR QUE 1

Dom: $(-\infty, 1)$

8) $f(x) = \frac{2-x}{1+|x-2|}$ Symbolab: $(-\infty, \infty)$

$1+|x-2| \neq 0$

$x-2 \neq -1$

9) $f(x) = \sqrt{|x^2-1|}$ radicando ≥ 0

$x^2-1 \geq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0$

$(\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$x-1=0$ $x+1=0$

$x=1$ $x=-1$

10) $\frac{2x^3-x-1}{2x^3+x^2-20}$

$2x^3+x^2-20=0$ $2\cdot 2^3+2^2-20=0$ ✓

$x_1=2$ El 2 anula denominador.

$x_2=-1{,}25+1{,}85\ i$

$x_3 = i$

Dom $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

11) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ $x \geq 0$

$x^2-1=0$

$x_1=1$

$x_2=-1$

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

DOMINIO CON VALOR ABSOLUTO

$f(x) = \sqrt{|x+1| - 1}$ → radicando ≥ 0

$|x+1| - 1 \geq 0$

PROPIEDAD

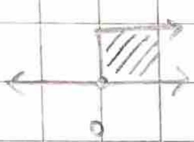
$|a| \geq b$

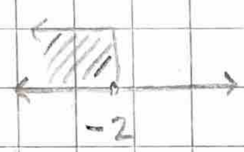
$|x+1| \geq 1$ ← $a \geq b \quad \vee \quad a \leq -b$

$\underbrace{x+1}_{a} \geq \underbrace{1}_{b}$

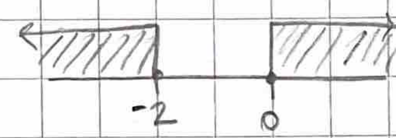
$x+1 \geq 1 \quad \vee \quad x+1 \leq -1$

$x \geq 0 \qquad x \leq -2$





⇒ UNIR INTERVALOS



Dom: $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$

INECUACIONES

$x+1 > 10$

$x > 10 - 1$

$x > 9$ → Todos los n°s mayores que 9 → intervalo

$(9, \infty)$

CUANDO MULTIPLICO O DIVIDO POR NEGATIVO EL SÍMBOLO CAMBIA

$3x > 9$

$x > \frac{9}{3}$

$x > 3$

$-5x > 20$ → multiplicar $\cdot -1$

$5x < -20$

$x < -\frac{20}{5}$

$x < -4$

Inecuacion lineal → max. exponente es 1 y la x no puede estar en el denominador

$$7x+5 < 2x-10$$
$$7x-2x < -10-5$$
$$5x < -15$$
$$x < -\frac{15}{5}$$
$$x < -3 \qquad (-\infty, -3)$$

$$3x \geq 5x+8$$
$$3x-5x \geq 8$$
$$-2x \geq 8 \qquad (\cdot -1)$$
$$2x \leq -8$$
$$x \leq -\frac{8}{2}$$
$$x \leq -4 \qquad (-\infty, -4]$$

$$3(x+5) > x-3$$
$$3x+15 > x-3$$
$$3x-x > -3-15$$
$$2x > -18$$
$$x > -\frac{18}{2}$$
$$x > -9 \qquad (-9, \infty)$$

$\frac{4}{3}x - 3x < -15$

Si hay 1 solo denom. se mult. toda la inec. x ese denom.

$3 \cdot \frac{4}{3}x - 3 \cdot 3x < 3 \cdot -15$

$4x - 9x < -45$

$-5x < -45 \quad (\cdot -1)$

$5x > 45$

$x > \frac{45}{5}$

$x > 9$

$(9, \infty)$

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{4} - \frac{1}{6}x$

Tomar todo los denom. y buscar min. com. mult.

$\cancel{12} \cdot \frac{3}{\cancel{4}}x - \cancel{12} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \geq \cancel{12} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} - \cancel{12} \cdot \frac{1}{\cancel{6}}x$

4	2	4	6	2
2	1	2	3	2
1	1	1	1	3

Sacar mitad

sacar tercera

$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$3 \cdot 3x - 6 \cdot 1 \geq 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1x$

$9x - 6 \geq 15 - 2x$

$11x \geq 21$

$x \geq \frac{21}{11}$

$\left[\frac{21}{11}, \infty\right)$

$$\frac{5x-3}{6} + \frac{x-5}{18} > \frac{x+1}{3}$$

min. com. mult.

6	18	3	3
2	6	1	2
1	3		3
	1		

$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

$$\cancel{18}^{3}\left(\frac{5x-3}{\cancel{6}}\right) + \cancel{18}\cdot\left(\frac{x-5}{\cancel{18}}\right) > \cancel{18}^{6}\cdot\left(\frac{x+1}{\cancel{3}}\right)$$

$3(5x-3) + (x-5) > 6(x+1)$

$15x-9 + x-5 > 6x+6$

$16x-14 > 6x+6$

$16x-6x > 6+14$

$10x > 20$

$x > \frac{20}{10}$

$x > 2$

$(2, \infty)$

$3 < x+1 < 7$

$3-1 < x+1-1 < 7-1$

$2 < x < 6$

$(2, 6)$

Queda x sola

Despejo x restando -1 a todos los miembros

PARA RESOLVER DE ESTE MODO:

Debe decir MENOR o MENOR o IGUAL. Si es myor se resuelve de otra forma.

La x debe estar al centro.

A la izq. nº menor y a la dª nº mayor.

$5 \leq 3x-7 < 14$

$5+7 \leq 3x-7+7 < 14+7$

$\frac{12}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{21}{3}$ → Dividir entre 3 p/ despejar x

$4 \leq x < 7$ → Nº's entre 4 y 7

$[4, 7)$

$2 \leq x+2 > 7$

Este metodo sirve p. cualquier inec. que tenga 3 miembros

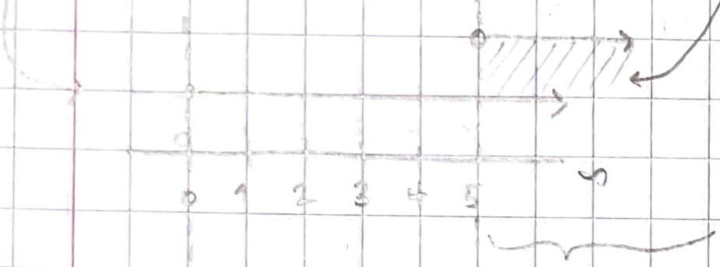
$2 \leq x+2$ $\qquad$ $x+2 > 7$

$0 \leq x$ $\qquad$ $x > 5$

↓ invertir

$x \geq 0$

$[0,\infty)$ $\qquad$ $(5,\infty)$



La respuesta es el trozo que tiene las 2 rectas

$(5,\infty)$

$-3 > 3x-2 \geq -11$

$-3 > 3x-2$ $\qquad$ $3x-2 \geq -11$

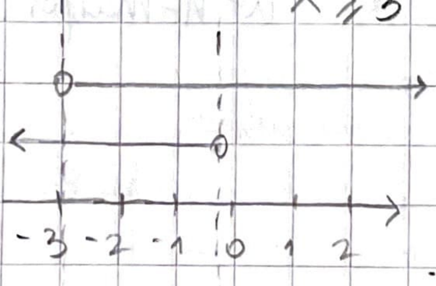
$-3x > -2+3$ $\qquad$ $3x \geq -11+2$

$-3x > 1 \quad (\cdot -1)$ $\qquad$ $3x \geq -9$

$3x < -1$ $\qquad$ $x \geq -\frac{9}{3}$

$x \leq -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x \geq -3$

$-0{,}33$



$[-3, -\frac{1}{3}]$

$4 > 2X \geq 10$

$4 > 2X$ $\quad$ $2X \geq 10$

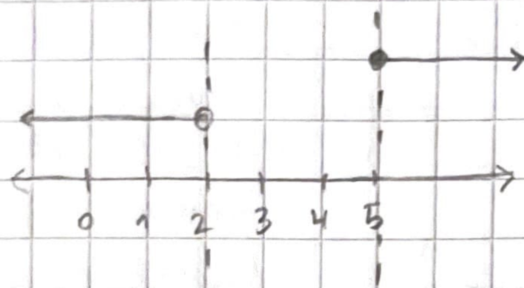
$2 > X$ $\quad$ $X \geq 5$

↓ inv

$X < 2$

• → Sí incluye

∘ → No incluye



Respuesta ∅ conjunto vacío

INECUACIÓN CUADRÁTICA O RACIONALES

Cuadrática: Variable al cuadrado: $x^2 + 5x - 6 > 0$

Racionales: División y hay x en denominador

$\frac{x+4}{x-3} < 0$ $\qquad$ $\frac{x+4}{5} < 0$

Sí es racional ↵ $\qquad$ ↳ No hay x en denom. **No** es racional

LAS CUADRÁTICAS Y RACIONALES SE RESUELVEN TENIENDO EN CTA MULT. Y DIVISIÓN. HAY QUE ESCRIBIRLA COMO MULT. DE PARÉNTESIS O DE FACTORES. HAY QUE FACTORIZAR.

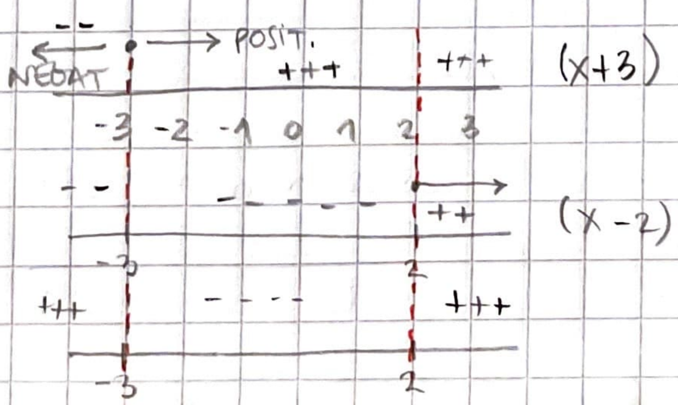
$x^2 + x - 6 \geq 0$

$(x+3)(x-2) \geq 0$

$x+3 = 0$ $\qquad$ $x-2=0$

$x = -3$ $\qquad$ $x = 2$

1. Debe quedar 0 a la derecha. Al ser ≥ 0 sí que es positiva
2. FACTORIZAR
3. PUNTOS CRÍTICOS: Igualar c/factor a 0 ¿saber cuando vale 0?
3. Graficar



$[-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

$x^2 - 3x - 10 > 0$

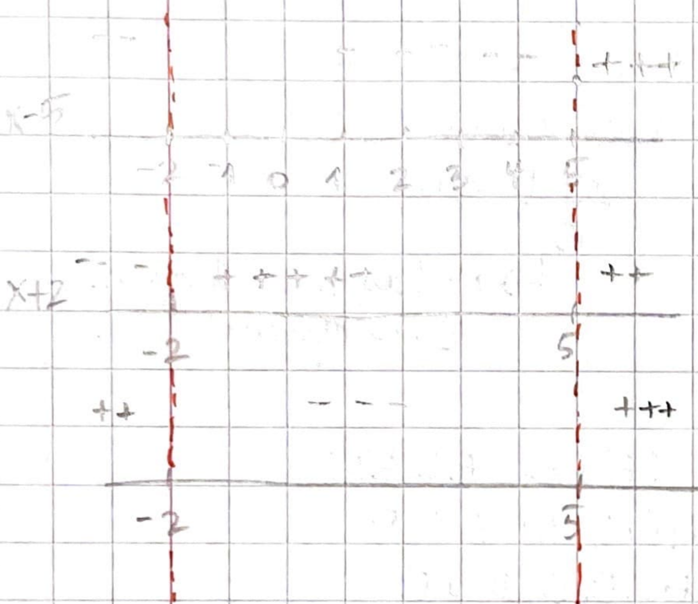
POSITIVA

$(x-5)(x+2) > 0$

Primer signo en 1er ()
Mult. de 2 signos en 2° ()
- Buscar 2 nº q' mult. den 3er termino (10) y restados den 3
(restado x q' signos son ≠)

$x-5=0 \qquad x+2=0$

$x=5 \qquad x=-2$



CON CALCULADORA

MODO 5 ECUAC

3 $ax^2+bx+c=0$

Resultado

$x_1 = 5$

$x_2 = -2$

Se anotan al contrario

$(x-5)(x+2)$

$\underbrace{(x-5)(x+2)}_{\text{POSITIVA}} > 0$

$(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

$2x^2+5x-3 \le 0$

negat.

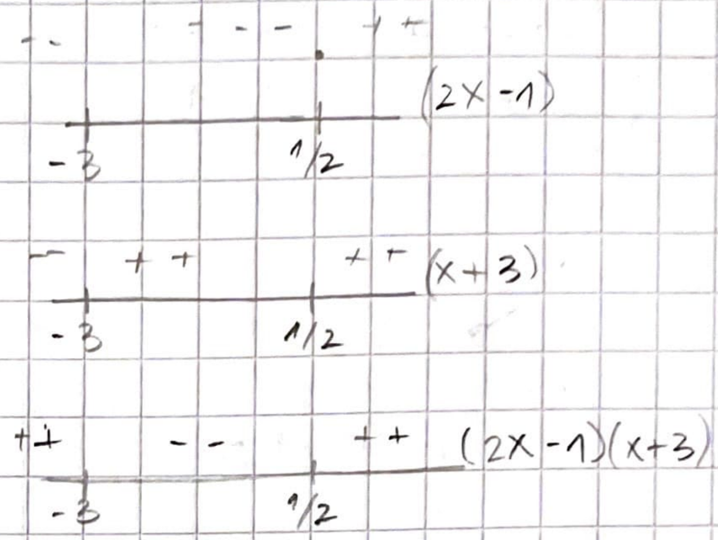
$x_1 = 1/2$

$x_2 = -3$

$2(x-0{,}5)(x+3) \le 0$

$(2x-1)(x+3) \le 0$

$2x-1=0$ | $x+3=0$
$2x = 1$ | $x=-3$
$x = 1/2$



$[-3, 1/2]$

INECUACIONES RACIONALES

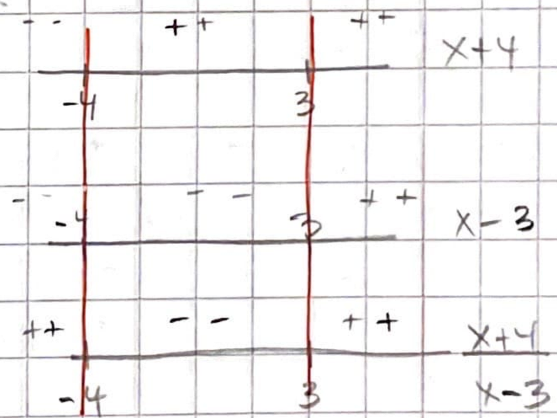
$\dfrac{x+4}{x-3} > 0$

positiva

Es racional cdo hay divis de expreses algebraicas.
A la dª tiene que haber 0.

Ptos críticos

$x+4=0$ | $x-3=0$
$x=-4$ | $x=3$



$(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

$$\frac{x-2}{x+1} \leq 0$$ → OJO, DENOMI. NO PUEDE SER 0

neg

$x-2=0$ $\quad$ $x+1=0$

$x=2$ $\quad$ $x=-1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$x-2$	--	-	++
$x+1$	--	++	++
$\frac{(x-2)}{x+1}$	++	--	++

→ $(-1,2]$

→ abierto xq denom. NO PUEDE ser 0

$$\frac{(x+5)(x+3)}{x-1} \leq 0$$

negat

$x+5=0$ $\quad$ $x+3=0$ $\quad$ $x-1=0$

$x=-5$ $\quad$ $x=-3$ $\quad$ $x=1$ abierto!!

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-3)$	$(-3,1)$	$(1,\infty)$
$x+5$	--	++	++	++
$x+3$	-	-	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$\frac{(x+5)(x+3)}{x-1}$	-	+	-	+

$(-\infty,-5] \cup [-3,1)$

ojo → cdo x es negativa :

$$\frac{4x-3}{3-x} \leq 0$$

negat

$4x - 3 = 0$

$4x = 3$

$x = \frac{3}{4}$

$3 - x = 0$

$-x = -3 \quad (\cdot -1)$

$x = 3$ abierto

	$\frac{3}{4}$		3		
$-$		$+$		$+$	$(4x-3)$
$+$		$+$		$-$	$(3-x)$ → ojo!! x es negativa. Es al reves
$-$		$+$		$-$	$\frac{4x-3}{3-x}$

$(-\infty, \frac{3}{4}] \cup (3, \infty)$

$$\frac{-2x+5}{x-1} \geq 0$$

posi

$-2x + 5 = 0$

$-2x = -5$

$x = \frac{5}{2}$

$2,5$

$x - 1 = 0$

$x = 1$ ab.

	1		$\frac{5}{2}$		
$+$		$+$		$-$	$-2x+5$ AL REVES!!
$-$		$+$		$+$	$x-1$
$-$		$+$		$-$	

$(1, \frac{5}{2}]$

$$\frac{x}{4-2x} \geq \frac{3}{4-2x}$$

$$\frac{x}{4-2x} - \frac{3}{4-2x} \geq 0$$

$$\frac{x-3}{4-2x} \geq 0 \quad \text{posi}$$

$x-3=0$ $\qquad$ $4-2x=0$

$x=3$ $\qquad$ $-2x=-4$

$x=2$ ab

	$x<2$	$2<x<3$	$x>3$
$x-3$	−	−	+
$4-2x$ OJO!!	+	−	−
$\frac{x-3}{4-2x}$	−	+	−

$(2,3]$

$$\frac{2}{x+3} \leq \frac{5}{2x-1}$$

$$\frac{2}{x+3} - \frac{5}{2x-1} \qquad \frac{2(2x-1)-5(x+3)}{(x+3)(2x-1)}$$

RESTA:

$$\frac{5}{3} - \frac{2}{7} = \frac{5\cdot 7 - 3\cdot 2}{3\cdot 7}$$

$$\frac{4x-2-5x-15}{(x+3)(2x-1)} \qquad \frac{-x-17}{(x+3)(2x-1)} \leq 0 \quad \text{neg}$$

	$x<-17$	$-17<x<-3$	$-3<x<1/2$	$x>1/2$
$-x-17$	+	−	−	−
$x+3$	−	−	+	+
$2x-1$	−	−	−	+
todo	+	−	+	−

$-x-17=0$ $\qquad$ $x=-3$ ab $\qquad$ $2x-1=0$

$-x=17$ $\qquad$ $2x=1$

$x=-17$ $\qquad$ $x=\frac{1}{2}$ ab

$[-17,-3) \cup (1/2,\infty)$

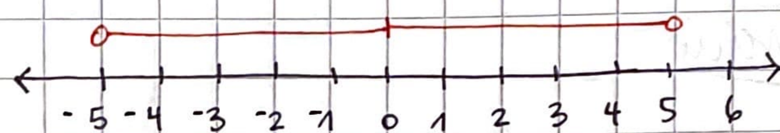
VALOR ABSOLUTO la distancia hasta 0

$|5| = 5$

$|-3| = 3$

$|4-6| = |-2| = 2$

$|x| < 5$

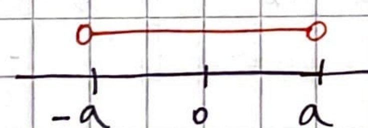


$-5 < x < 5$ → Nºs entre -5 y 5

$|x| < -20$

$\emptyset$ → Conjunto vacío

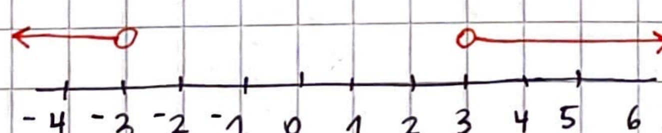
$|x| < a$



$-a < x < a$

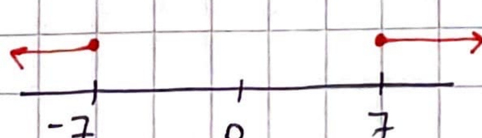
$|x| > a$

$|x| > 3$



$x < -3$ U $x > 3$

$|x| \geq 7$



$x \leq -7$ U $x \geq 7$

VALOR ABSOLUTO

$|x| < a$ $\quad -a < x < a$ Todos los nºs entre $-a$ y a

$|x| > a$ $\quad x < -a \cup x > a$ Nºs menores $-a$ y mayores a

$|x| > -a \rightarrow \mathbb{R}$

Ejercicio

$|x| \geq 8$

$x \leq -8 \cup x \geq 8$

$|x| > \frac{2}{3}$

$x < -\frac{2}{3} \cup x > \frac{2}{3}$

$|x| \geq -3$

$\mathbb{R}$

$|\underbrace{x+5}_{x}| \geq \underbrace{3}_{a}$ → FORMULA $|x| \geq a \rightarrow x \leq -a \cup x \geq a$

$x+5 \leq -3 \cup x+5 \geq 3$

$x \leq -8 \cup x \geq -2$

$|3x-2| > 4$ → FÓRMULA $x < -a \cup x > a$

$3x-2 < -4 \cup 3x-2 > 4$

$3x < -2 \qquad 3x > 6$

$x < -\frac{2}{3} \cup x > 2$

$\underbrace{|x-3|}_{x} \leq \underbrace{12}_{a}$ → FORMULA $|x| \leq a \quad -a \leq x \leq a$

$-12 \leq x-3 \leq 12 \quad (+3)$

$-12+3 \leq x-3+3 \leq 12+3$

$-9 \leq x \leq 15$

$\left|\dfrac{3x-1}{4}\right| \geq \underbrace{5}_{a}$ → FORMULA $\quad x \leq -a \ \cup \ x \geq a$

$\dfrac{3x-1}{4} \leq -5 \quad \cup \quad \dfrac{3x-1}{4} \geq 5$

$3x-1 \leq -5 \cdot 4 \qquad 3x-1 \geq 5 \cdot 4$

$3x-1 \leq -20 \qquad 3x-1 \geq 20$

$3x \leq -19 \qquad 3x \geq 21$

$x \leq -\dfrac{19}{3} \quad \cup \quad x \geq 7$

$\left(-\infty, -\dfrac{19}{3}\right] \cup [7, \infty)$

$\underbrace{1+4x \leq 5x-9}_{1} \leq 10x+6$; $\underbrace{5x-9 \leq 10x+6}_{2}$

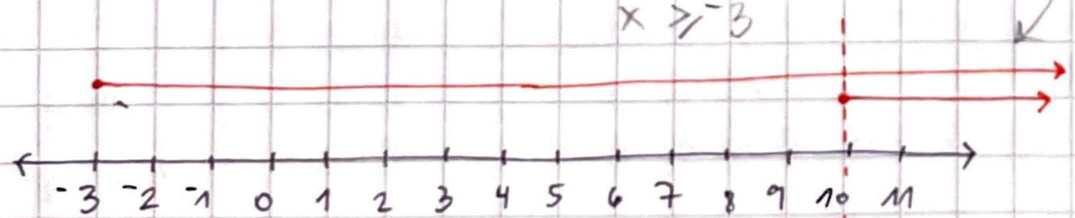
$1+4x \leq 5x-9 \qquad 5x-9 \leq 10x+6$

$-x \leq -10 \quad (\cdot -1) \qquad -5x \leq 15 \quad (\cdot -1)$

$x \geq 10 \qquad 5x \geq -15$

$x \geq -3$

COINCIDEN ⇓ RESPUESTA



$[10, \infty)$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

$f(x)$
$g(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

G COMPUESTA F

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = \ln x$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = \boxed{(\ln x)^2 + 1} \Leftarrow f \circ g$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \ln(x^2+1)$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(\ln x) = \ln(\ln x)$$

$(f \circ g)(3) = f(g(3))$

$g(3) = \ln 3$ $\quad$ $f(\ln 3) \longrightarrow$ reemplazo x de $f(x)$ $\longrightarrow (\ln 3)^2 + 1$